(۱) نشان دهید که اگر X یک $\mathbb{Z}$-مدول باشد که هم تصویری است و هم تزریقی آنگاه $X=\langle 0\rangle$

(۲) فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $I \trianglelefteq R$. اگر ${}_RE$ یک مدول تزریقی باشد، نشان دهید $ann_E(I)$ یک $\frac{R}{I}$-مدول تزریقی است

(۳) برای هر R-مدول ${}_RA$ و $I \trianglelefteq R$ نشان دهید

$$Hom_R\left(\frac{R}{I}, A\right) \cong ann_A I$$

به عنوان دو R-مدول چپ

(۴) فرض کنید R یک دامنه یکدار و جابجایی باشد که میدان نیست و E یک R-مدول تزریقی. نشان دهید E زیرمدول ماکسیمال ندارد (از تمرین ۱ استفاده کنید)

(۵) نشان دهید پوچساز یک R-مدول ساده، یک ایده‌آل اول در حلقه R است. و اگر R جابجایی باشد، یک ایده‌آل ماکسیمال است.

(۶) اگر R یک دامنه یکدار و جابجایی باشد، نشان دهید

$$R \neq Q(R) = R \text{ میدان کسرهای } \Longrightarrow Hom_R(Q(R), R) = 0$$

(۷) نشان دهید $\mathbb{Q} \cong End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$ (به عنوان دو حلقه)

(۸) یک R-مدول M را نیم ساده گوییم هرگاه برای هر $N \leq M$ زیرمدول N' موجود باشد بطوریکه $N \oplus N' = M$. نشان دهید زیرمدول و فاکتور هر نیم ساده، یک مدول نیم ساده است.

⑨ فرض کنید R یک حلقه یکدار و فاقد ایده‌آل دو طرفه باشد، K یک ایده‌آل راست ماکسیمال در R باشد. نشان دهید $R \oplus X \cong K_R^{(n)}$ (که در آن X یک R-مدول راست است)

⑩ فرض کنید $M = N \oplus K$ که در آن $N, K \leq M_R$.
نشان دهید $Hom_R(N, K) = 0$ اگر و فقط اگر $\forall f \in End_R(M)$ داشته باشیم $f(N) \subseteq N$

⑪ فرض کنید $N \leq M_R$. زیرمدول N را در M اساسی گوییم هرگاه $N \cap K \neq 0$ برای هر $0 \neq K \leq M_R$. اگر S یک R-مدول ساده (یعنی فاقد زیرمدول نابدیهی) در E_R اساسی باشد و $E \subseteq \prod_{i \in I} L_i$ که در آن هر L_i یک R-مدول ناصفر است. نشان دهید:
$\exists\, i \in I$ و $f: E_R \xrightarrow{1-1} L_i$

⑫ نشان دهید هر R-مدول تصویری، حداقل یک زیرمدول ماکسیمال دارد

⑬ فرض کنید P یک R-مدول تصویری باشد و اشتراک تمام زیرمدول‌های ماکسیمال در P برابر صفر باشد. نشان دهید برای هر $0 \neq K \leq P_R$
$Hom_R(P, K) \neq 0$

⑭ فرض کنید $\mathbb{R}$ = میدان اعداد حقیقی، $\mathbb{Q}$ = میدان اعداد گویا.
برای هر مدول M و هر مجموعه X نماد $M^{(X)}$ یعنی $\sum_{i \in X} M_i$ که در آن $M_i \cong M$ (برای هر $i \in X$). نشان دهید
$\mathbb{R} \cong \mathbb{Q}^{(\mathbb{R})}$ به عنوان دو $\mathbb{Q}$-مدول

۱۵) فرض کنید R یک حلقه یکدار. نشان دهید در حلقه R، هر ایده‌آل راست دوری، یک R-مدول تصویری است اگر و فقط اگر پوچساز راست هر عضو در R توسط یک عنصر خودتوان تولید شود

۱۶) یک R-مدول M را بخش‌پذیر گویند هرگاه $Ma=M$ برای هر عضو a در R که مقسم صفر نباشد. نشان دهید هر R-مدول تزریقی بخش‌پذیر است ولی عکس آن درست نیست.

۱۷) فرض کنید $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots$ یک جمع مستقیم از R-مدول‌ها باشد
زیرمدول X از یک مدول Y را تماماً پایا گویند هرگاه برای هر $f\in End_R(Y)$ داشته باشیم $f(X)\subseteq X$. نشان دهید N در M تماماً پایاست اگر و فقط اگر $N=N_1\oplus N_2\oplus\cdots$ که در آن هر N_i در M_i تماماً پایاست

۱۸) با توجه به تمرین (۱۷) تمام زیرمدول‌های تماماً پایا $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول مشخص کنید ($\mathbb{Q}$ میدان اعداد گویاست)

۱۹) فرض کنید R یک حلقه یکدار جابجایی و P، Q، R-مدول‌های تصویری و متناهیاً تولید شده باشند. نشان دهید
$Hom_R(P,Q)$ نیز یک R-مدول تصویری و متناهیاً تولید شده است

۲۰) فرض کنید V، یک فضای برداری روی حلقه تقسیم D باشد و $S=End(V)$
نشان دهید V یک S-مدول ساده است (فاقد زیرمدول نابدیهی)

(۲۱) فرض کنید M یک R-مدول باشد که هر زیرمدول آن، یک R-مدول تصویری است. نشان دهید برای هر دو زیرمدول K و L از M، R-مدول W موجود است بطوریکه

$$\{(x,-x) \mid x\in K\cap L\}\oplus W=(K\cap L)\oplus(K\cap L)$$

(۲۲) فرض کنید M یک R-مدول است ناصفر و I ایده‌آل در R باشد که $MI=0$. نشان دهید اگر M به عنوان R-مدول تصویری (تزریقی) باشد آنگاه M به عنوان $\frac{R}{I}$-مدول نیز به ترتیب تصویری (تزریقی) است ولی عکس آن برقرار نیست.

(۲۳) فرض کنید R یک حلقه یکدار و جابجایی و P یک ایده‌آل ماکسیمال در R. نشان دهید

$$\operatorname{Hom}_R\left(M,\frac{R}{P}\right)\neq 0 \iff M\neq MP$$